## 第五部分 方阵特征值与特征向量、二次型

1. **有关特征值、特征向量的结论：**

**1、设是一个阶方阵，若存在数和维非零向量，使成立，则称是方阵的一个特征值，是的对应于的特征向量；称为方阵的特征矩阵；称为方阵的特征多项式，为的次多项式；称，即为方阵的特征方程．**

**2、特征值与特征向量的性质**

**性质 1对应于不同特征值的特征向量是线性无关的．**

**性质 2设阶方阵**的个特征值为，则**

**； （1）**

**． （2）**

**性质3设为方阵的特征值，是对应于的特征向量，**为常数，*m*为正整数，则及分别是矩阵，及的特征值，而为对应的特征向量．**

**3. 相似矩阵**

**定义 设，为阶方阵，若有可逆方阵，使，则称矩阵与相似．**

**性质4 若与相似，则．**

**性质5 若与相似，则，从而与有相同的特征值．**

**性质6 若与相似，则 ．**

**性质7 若与相似，则 ．**

1. **有关正定矩阵、二次型的结论**

**1、二次型可以表示为**

**，**

**为对称阵． 对称矩阵叫做二次型的矩阵，叫做对称阵的二次型．对称阵的秩就叫做二次型的秩．**

**2、次型的标准形（或法式）和规范形**

**只含有平方项的二次型**

****

**称为二次型的标准形．**

**如果标准形的系数，，，只在1，，0三个数中取值，也就是**

**，**

**称为二次型的规范形，其中为的正惯性指数，为的负惯性指数．**

**定理　任给二次型，总有正交变换，使化为标准形**

**，**

**其中是的矩阵的特征值．**

**3、矩阵合同**

**设和是阶矩阵，若有可逆矩阵，使得，则称矩阵与合同．合同矩阵具有相等的秩．**

**设有二次型，如果对任何，都有，则称为正定二次型，并称对称矩阵是正定的． 如果对任何，都有，则称为负定二次型，并称对称矩阵是负定的．**

**4、正定二次型的判别**

**下列条件之一都是二次型为正定的充要条件：**

**（1）设有二次型，如果对任何，都有，则称为正定二次型，并称对称矩阵是正定的．**

**（2）的标准形的个系数全为正．**

**（3） 对称矩阵的各项主子式都为正，即**

**， ， ，．**

**（4）的特征值全为正．**

**（5）为可逆矩阵。**

**三、例题**

## （一）、填空题

**【例】【例】 若为可逆矩阵*A*的特征值，则的一个特征值为．**

**为阶方阵，且，则的一个特征值为．**

**【例】二次型的秩为．**

**【例】设与相似，则【 C 】．**

**(A) 0； (B) 2； (C) 1； (D) 3．**

**【例】若维列向量为阶方阵*A*的一个特征向量，阶方阵可逆，则的一个特征向量为【 Ｄ 】．**

**(A) ； 　 (B) ； 　 (C) ； 　 (D) ．**

**【例】 为阶矩阵，且，则的一个特征值为．**

**【例】若为正定二次型，则的取值范围（）．**

**【例】设为阶矩阵，为阶可逆矩阵，且，若，则．**

**【例】设是阶矩阵，，是的伴随矩阵．若有特征值，则必有一个特征值是（）．**

**【例】设是阶方阵，是的伴随矩阵，，则方阵的一个特征值是 2 ，特征向量是**

**【例】**若3维列向量满足，其中为的转置，则矩阵的非零特征值为 。

【答案】2

【解析】

, 的非零特征值为2.

**【例】**设二次型的负惯性指数是1，则的取值范围\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】配方法：

由于二次型负惯性指数为1，所以，故.

**（二）、 选择题**

**【例】若二次型，为正定二次型，则【 B 】.**

**(A) ； (B) ； (C) ； (D) ．**

**【例】矩阵与 相似的充分必要条件为【 A 】**

**(A) 为任意常数； (B) ；**

**(C) 为任意常数； (D) ．**

**【例】n阶实对称矩阵和相似的充分必要条件是( D )**

**(A) 和都有个线性无关的特征向量；（B）；**

**（C）和的主对角线上元素之和相等；（D） 和有个相同的特征值．**

**【例】设3阶矩阵*A*的特征值为，对应的特征向量依次为，令**

**，则【 D　】．**

**(A) ；(B) ；(C) ；(D) .**

**【例】 设为实矩阵，则线性方程组只有零解是矩阵为正定矩阵的**

**【 D　】．**

**(A) 充分条件； (B) 必要条件； (C) 无关条件；(D) 充分必要条件．**

**【例】 已知为阶方阵，是非齐次线方程组的两个不同解，则以下选项中一定是矩阵对应特征值的特征向量为【 B 】．**

**(A) ； 　　(B) ； 　　　　(C)  ；　　　　 (D) ．**

**【例】设相似于对角阵,则( (A) );**

**(A) ; (B) 2; (C)3; (D) 0.**

**(A) ; (B) ; (C)  ; (D)  .**

**【例】**设二次型 在正交变换为 下的标准形为 ，其中 ，若 ，则在正交变换下的标准形为 ( )

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

【答案】(A)

【解析】由，故.且

.





所以。

**(三)、解答题**

**【例】设三阶实对称矩阵的特征值为1,2,3； 的属于特征值1,2的特征向量为**

**，**

**(1) 求的属于特征值3的特征向量.**

**(2) 求方阵.**

**解：（1）设的属于特征值3的特征向量为，则，即**

**解得. (2)**

****

**【例】二次型，经正交变换后可变为**

**标准形，**

**（1）求 的值； （2） 求出该正交变换．**

**解：的矩阵及标准形的矩阵分别为**

**， ．**

1. **因 ，所以a=3;**
2. **矩阵的四个特征值分别为，**

**特征值对应的特征向量为,**

**特征值对应的特征向量为,**

**特征值对应的特征向量为，**

**特征值对应的特征向量为.**

**因此令： **

**因此所作的正交变换为**

**．**

**【例】已知是矩阵的特征值．**

**（1）求的值； （2）求正交矩阵使为对角矩阵，并写出该对角阵．**

**解 （1）由是矩阵的特征值，知**

****

**解得．**

**（2）**

**的特征值是1（二重），-1，3．**

**属于1的线性无关的特征向量为，单位化得**

****

**属于-1的线性无关的特征向量为，单位化得**

****

**属于3的线性无关的特征向量为，单位化得**

****

**令，**

**则 **

**【例】二次型，令**

****

**（1）证明二次型对应的矩阵为**

**（2）若正交且均为维单位维列向量，证明二次型在正交变换下的标准形为 ．**

**解：(1) **

****

**二次型矩阵:**

****

****

**(2) **

****

**则和为的特征值，**

**于是．**

**又，则．**

**因此另一个特征值为，**

**故在正交变换下的标准形为 ．**

**【例】设阶实对称矩阵满足，且，**

1. **求的全部特征值；**

**（2） 为何值时，为正定矩阵．**

**解：（1）设为的特征值，是与对应的特征向量，则**

**由得，**

**由得，，则有或**

**由知，的三个特征值为．**

1. **的特征值为，**
2. **则当时，为正定矩阵．**

**，**

**【例】设为阶实对称矩阵，且的秩，**

**已知，**

**求： 的所有特征值及每一个特征值所对应的特征向量．**

**解：由知：**

**则是的特征值，是分别与对应的特征向量，**

**又，则另一个特征值为。**

**设对应的特征向量为，则由得。**

**【例】设为阶方阵，且满足，证明的特征值只能是或２．**

**证 令是的特征值，是与对应的特征向量，则**

**由 得，，**

**由知， ，即或，**

**因此的特征值只能是或２．**

**【例】设是元非齐次线性方程组的两个解，为阶方阵，证明：**

**(1) 存在一个非零向量与的每一个行向量都正交;**

**(2) .**

**证: (1)令,则,**

**因此有,**

**故存在一个非零向量与的每一个行向量都正交.**

**(2)由于齐次线性方程组有非零解,则.**

**【例】设,,为实数.**

**（1）求正交矩阵,使得为对角形.**

**（2）为何值时，为正定矩阵.**

**解**

**（1），得特征值**

**属于的线性无关特征向量是线性方程组的非零解，即是方程组**

**的解．**



**求得属于的线性无关特征向量**



**正交化单位化得**



**属于的特征向量是线性方程组的非零解，即是方程组**



**的非零解．**

**求得属于的线性无关特征向量**



**单位化得**



**令**



**则**



**于是**

**．**

**（2）且时， 为正定矩阵．**



**【例】**设矩阵相似于矩阵.

1. 求的值；

（II）求可逆矩阵，使为对角矩阵..

【解析】(I) ，可得





(II)





的特征值

时的基础解系为

时的基础解系为

A的特征值

令，



**【例】**已知，二次型的秩为2

（I）求实数的值；

（II）求正交变换将化为标准形.

【详解】本题涉及到的主要知识点：

（i）实对称矩阵的特性：不同特征值的特征向量互相正交.

（ii）任给二次型，总有正交变换，使化为标准形

，其中是的矩阵的特征值.

（I）二次型的秩为2，即

因为，故.对作初等变换有

，

所以.

（II）当时，.由

，

可知矩阵的特征值为0，2，6.

对，由得基础解系，

对，由得基础解系，

对，由得基础解系.

实对称矩阵特征值不同特征向量相互正交，故只需单位化.

，，.

那么令，就有.

**【例】**  设二次型

（Ⅰ）求二次型的矩阵的所有特征值；

（Ⅱ）若二次型的规范形为，求的值。

【解析】（Ⅰ） 







（Ⅱ） 若规范形为，说明有两个特征值为正，一个为0。则

1. 若，则  ， ，不符题意
2. 若 ，即，则，，符合
3. 若 ，即，则 ，，不符题意

综上所述，故

**【例】**证明阶矩阵与相似.

【解析】已知，，

则的特征值为，(重).

属于的特征向量为；，故基础解系有个线性无关的解向量，即属于有个线性无关的特征向量，故相似于对角阵.

的特征值为，(重)，同理属于有个线性无关的特征向量，故相似于对角阵.

由相似关系的传递性，相似于.